Лекция 5. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешудің сандық әдістері туралы кейбір мәліметтер (дәріс беруші- қауымдастырылған профессор Маусымбекова С.Д.)

Алматы, 2024

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешудің сандық әдістері туралы кейбір мәліметтер

Туындылардың ақырлы–айырымдар аппроксимациясы

Кеңістік параметрлері мен уақытқа тәуелді $p(x, y, z, t)$ функциясын қарастырайық. Функцияның мәні кеңістік пен уақыт бойынша бірдей бөліктерге бөлінген торда анықталсын. Келесі өлшемсіз координаталар енгізілсін:

$$i = \frac{x}{\delta x}, j = \frac{y}{\delta y}, k = \frac{z}{\delta z}, t = \frac{T}{\delta t},$$

мұндағы $\delta x, \delta y$ - горизонтальді координаталар бойынша қадамдар, δz - вертикальд3 координат бойынша қадам, δt - уақыт бойынша қадам. $p(x, y, z, t)$ функциясының x_i, y_j, z_k, t^n бнүктедегі мәнін p^n_{ijk} арқылы белгілейміз, яғни, $p^n_{ijk} = p(x_i, y_j, z_k, t^n)$.

Функциялардың туындыларын ақырлы айырымдармен алмастырудың бірнеше жолы бар. Қолайлы әдісті таңдау белгілі бір мәселенің ерекшеліктерімен анықталады. Туындылар келесі түрде жазылуы мүмкін:

$$(\frac{\partial p}{\partial x})_i \approx (\delta^1_x p)_i = \frac{1}{\delta x}(p_{i+1} - p_i) \tag{1}$$

$$(\frac{\partial p}{\partial x})_i \approx (\delta^2_x p)_i = \frac{1}{2\delta x}(p_{i+1} - p_{i-1}) \tag{2}$$

Туындыны ауыстырудың бірінші жолы екі нүктелі (бір жақты айырма), екінші әдіс - үш нүктелі аппроксимация (орташаланған айырма). Жоғары ретті туындылардың жуық шамаларын бірінші ретті туындылар арқылы өрнектеуге болады. Төменде екінші ретті туынды үшін ақырлы-айырымдар жуықтауы келтірілген:

$$(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2})_i \approx (\delta_{xx} p)_i = \frac{1}{(\delta x)^2}(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) \tag{3}$$

Жоғарыда көрсетілген қатынастарды бірнеше айнымалысы бар функцияның жағдайына оңай таратуға болады, мысалы, Лаплас операторы үшін келесі ақырлы–айырымдар өрнегін алуға болады:

$$(\Delta p)_{ij} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \approx (\delta_{xx} p_{ij}) + (\delta_{yy} p_{ij}) =$$

$$= \frac{1}{(\delta x)^2}(p_{i+1,j} - 2p_{i,j} + p_{i-1,j}) + (\frac{1}{(\delta y)^2}(p_{i,j+1} - 2p_{ij} + p_{i,j-1})$$

Туындылардың ақырлы–айырымдармен жуықтаулардың дәлдігін бағалау

Бұл мәселені шешудегі маңызды қадам – туындыларды ақырлы–айырымдармен жуықтаулардың дәлдігін бағалау. Осы мақсатта белгілі нүктедегі туындының дәл мәні мен жуықтау мәнінің арасындағы айырма енгізіледі:

$$\varepsilon = \delta_x p - \frac{\partial p}{\partial x.} \tag{4}$$

Функцияны Тэйлор қатарына жіктеу арқылы

$$p(x+\delta x) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x}\delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(\delta x)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}(\delta x)^3 + ...$$

Келесі өрнектерді аламыз:

$$p_{i+1} = p_i + (\frac{\partial p}{\partial x})_i\delta x + \frac{1}{2!}(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2})_i(\delta x)^2 + \frac{1}{3!}(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3})_i(\delta x)^3 + ...$$

$$p_{i-1} = p_i + (\frac{\partial p}{\partial x})_i(-\delta x) + \frac{1}{2!}(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2})_i(-\delta x)^2 + \frac{1}{3!}(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3})_i(-\delta x)^3 + ...$$

Алынған өрнектерді (1.20) теңдігіне қою арқылы келесі теңдікке келеміз:

$$\varepsilon_1 = (\delta_x^1)p - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2!}(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2})_i(\delta x)^2 + \frac{1}{3!}(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3})_i(\delta x)^3 + ... = O(\delta x)$$

$$\varepsilon_2 = (\delta_x^2)p - \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{2*3!}(\frac{\partial^3 p}{\partial x^3})_i(\delta x)^3 + ... = O((\delta x)^2)$$

Алынған айырмаларды алу арқылы, қалдықты білдіретін қатардың үлкен мүшесі бірінші жағдайда– δx, екінші жағдайда – $(\delta x)^2$ екенін көруге болады. Тор арасындағы қашықтық аз болғандықтан, бұл қатарлардың дәлдік дәрежесі бірінші жағдайда бірге тең, екінші жағдайда екіге тең, және келесі символдармен белгіленеді – $O(\delta x)$, $O((\delta x)^2)$.

Айқын және айқын емес сұлбалар

Дифференциалдық теңдеулермен сипатталған мәселелерді шешу үшін уақыт бойынша туындылары бар дифференциалдық теңдеулердің ақырлы айырымдары ерекше қызығушылық тудырады. Мұнда біз екі сұлбаны қарастырамыз: айқын және айқын емес. Жеңілдету мақсатында қарапайым сызықты дифференциалдық теңдеу қарастырылады:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

мұндағы c- тұрақты.

Қажетті белгісіздер белгілі мәндер көмегімен табылатын болса, ондай сұлбалар **айқын** деп аталады. (1.21) теңдеуінің ақырлы-айырыдар арқылы берілген түрі келесідей жазылуы мүмкін:

$$(\frac{\partial v}{\partial t})_j^n + c(\frac{\partial v}{\partial y})_j^n = 0.$$

Кеңістік координатасына қатысты туындыға (1.18) формуласын және уақыт бойынша туындыны (1.17) формуласы арқылы өрнектеу арқылы келесі ақырлы-айырымдар алынады:

$$v_j^{n+1} - v_j^n + \frac{\alpha}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = 0 \tag{6}$$

$$v_j^{n+1} - v_j^{n-1} + \alpha(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = 0 \tag{7}$$

Мұндағы $\alpha = c\dfrac{\delta t}{\delta y}$.

Егер функцияның белгілі бір уақытта v мәні белгілі болса, (1.22), (1.23) өрнектердің көмегімен функцияның келесі уақыттағы мәнін функциялардың белгілі мәндері бойынша анық табуға болады:

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\alpha}{2}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} - \alpha(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n)$$

Дифференциалдық теңдеудің уақыт туындыларын және басқа мүшелерін уақыттың әртүрлі мезетіне жатқызған жағдайда, айқын емес сұлбалар алынады. Бұл жағдайда белгісіз айнымалылар айқын көрсетілмейді. Мысалы, уақыт бойынша туындыны n мезетіне және теңдеудің қалған мүшелерін функцияның $n+1$ мезетіндегі мәніне теңесек

$$(\frac{\partial v}{\partial t})_j^n + \alpha(\frac{\partial v}{\partial y})_j^{n+1} = 0$$

онда туындыларды аппроксимациалау үшін екінші әдісті қолдану мынадай теңдеуді алуға мүмкіндік береді:

$$v_j^{n+1} - v_j^{n-1} + \alpha(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) = 0 \tag{8}$$

Егер уақыт бойынша туындыны n-де анықталса, теңдеудің қалған мүшелерін функцияның басқа уақыт мезетіндегі мәндермен анықтаса,

$$(\frac{\partial v}{\partial t})_j^n = \frac{1}{2}[(\frac{\partial v}{\partial y})_j^{n+1} + (\frac{\partial v}{\partial y})_j^{n-1}] \tag{9}$$

келесі ақырлы - айырымдарды алуға болады:

$$v_j^{n+1} - v_j^{n-1} + \frac{\alpha}{2}(v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1} + v_{j+1}^{n-1} - v_{j-1}^{n-1}) = 0. \tag{10}$$

(1.24) және (1.25) теңдіктері функцияның $n+1$ сәттегі мәнімен функцияның өткен сәттегі мәні арасындағы байланысты береді. Сонымен қатар, функцияның $(j, n+1)$ нүктедегі мәнін функциялары басқа мәндері арқылы айқын табылуы мүмкін емес, сондықтан мұндай ақырлы-айырымдар айқын емес деп аталады. Мұндай сұлбалар қажетті айнымалыларды есептеуге мүмкіндік бермегендіктен, іс жүзінде бұл қатынастар арнайы әдістер (итеративті) арқылы шешуге болатын теңдеулер түрінде ұсынылады.

Ақырлы-айырымдар сұлбаларының тұрақтылығын бағалау

Ақырлы-айырымдар арқылы жазылған теңдеулерді шешкен кезде, есептеу процедураларын бірнеше рет қайталап орындау қажет болады. Егер сіз арнайы шараларды қолданбасаңыз, бастапқы шарттардағы немесе есептеулер процесінде кішігірім қателер соңғы шешімді бұрмалауы мүмкін. Бұл құбылыс есептеу тұрақсыздығы деп аталады. Мысал ретінде тасымалдау теңдеуін (1.21) пайдаланамыз. Алдымен, бастапқыда $v(y)$ функциясының формасы келесідей деп, теңдеудің дәл шешімін аламыз:

$$v(y) = Ae^{imy},$$

мұндағы A - толқын амплитудасы, $m = 2\pi/L$ – толқын саны, L – толқын ұзындығы, $i = \sqrt{-1}$.
Алғашқы шартқа сәйкес (1.21) теңдеуінің шешімі келесідей ізделінеді:

$$v(y,t) = Ae^{i(my-\sigma t)},$$

Мұндағы $\sigma = 2\pi/T$ - жиілік, T – период, $c = \sigma/m$ – толқын таралу жылдамдығы. Келесі өрнектерді

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -i\sigma Ae^{i(my-\sigma t)}, \frac{\partial v}{\partial y} = -imAe^{i(my-\sigma t)},$$

(1.19) теңдігіне қою арқылы келесі теңдеу алынады:

$$iAe^{i(my-\sigma t)}[-\sigma + cm] = 0.$$

$\sigma = cm$, яғни

$$v(y,t) = Ae^{im(y-ct)}.$$

Алынған шешім толқын таралуында оның амплитудасының өзгермегенін көрсетеді, яғни шешімнің тұрақтылығын білдіреді. Алғашқы шартты келесі түрде алып,

$$v_j^0 = Ae^{imj\delta y},$$

ақырлы-айырымдар теңдеулеріне өтсек, алынған теңдеудің шешімі келесі түрде ізделінеді:

$$v_j^n = Ae^{i(mj\delta y - \sigma n\delta t)},$$

Келесі теңдіктерді оңай тексеруге болады:

$$v_j^{n-1} = Ae^{i(mj\delta y - \sigma(n-1)\delta t)} = v_j^n e^{i\sigma\delta t},$$

$$v_{j+1}^n = v_j^n e^{im\delta y}; v_{j-1}^n = v_j^n e^{-im\delta y}$$

$$v_{j+1}^{n+1} = v_j^n e^{j(m\delta y - \sigma\delta t)}; v_{j-1}^{n+1} = v_j^n e^{i(-m\delta y - \sigma\delta t)}.$$

(1.15) айқын сұлбасы қарастырылады. (1.20) теңдігінен алынған өрнектерді осы теңдеуге қою арқылы келесі теңдеу алынады:

$$v_j^n e^{-i\sigma\delta t} - v_j^n + \frac{\alpha}{2}(v_j^n e^{im\delta y} - v_j^n e^{-im\delta y}) = 0$$

немесе

$$v_j^n m[e^{-i\sigma\delta t} - 1 + \frac{\alpha}{2}(e^{im\delta y} - e^{-im\delta y})] = 0.$$

$v_j^n \neq 0$ жағдайында:

$$e^{-i\sigma\delta t} - 1 + \frac{\alpha}{2}(e^{im\delta y} - e^{-im\delta y}) = 0$$

Эйлер формуласын ескеріп, $e^{iz} - e^{-iz} = 2isinz$, положим, что $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$, мұндағы σ_r және σ_i - σ санының нақты және жорамал бөліктері.

$$e^{-i\sigma\delta t} = e^{-i(\sigma_r i\sigma_i)\delta t} = e^{-i\sigma_r\delta t}e^{\sigma_i\delta t)}e^{\sigma_i\delta t}[cos(\sigma_r\delta t) - isin(\sigma_r\delta t)]$$

өрнегі ескеріліп келесі теңдік алынады:

$$e^{\sigma_i\delta t}[cos(\sigma_r\delta t) - isin(\sigma_r\delta t)] - 1 + i\alpha sin(n\delta y) = 0.$$

Нақты және жорамал бөліктері жеке қарастырылады:

$$e^{\sigma_i\delta t}cos(\sigma_r\delta t) = 1$$

$$e^{\sigma_i\delta t}sin(\sigma_r\delta t) = \alpha sin(n\delta y)$$

Теңдіктің екі жағын квадраттап, қосып келесі теңдік алынады:

$$e^{2\sigma_i\delta t} = 1 + \alpha^2 sin^2(n\delta y)$$

Бұл теңдеудің оң жағы әрқашан бірден үлкен болғандықтан $e^{2\sigma_i\delta t} > 1$,

$$2\sigma_i\delta t > 0,$$

яғни әрқашан $\sigma_i > 0$. Алынған шешім келесідей жазылады:

$$v_j^n = Ae^{i(mj\delta y - \sigma n\delta t)} = Ae^{i[mj\delta y - (\sigma_r + i\sigma_i)b\delta t]} = Ae^{\sigma_i}n\delta te^{i(mj\delta y - \sigma_r n\delta t)}.$$

Амплитуданың алғашқы мультипликаторы уақыттың ұлғаюымен арта түседі. Демек, бастапқы толқынның амплитудасы да арта түседі. Уақыт қадамы неғұрлым үлкен болса, аммплитуданың өсуі күшейе түседі. Уақытқа қатысты шексіз шағын қадамда амплитуда болмайды. Яғни, бір жақты айырымдарға ие айқын сұлба есептеу тұрақсыздығына ие екендігі туралы қорытынды жасауға болады.

Сұрақтар:

1. $\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ екінші туындының ақырлы-айырымдар жуықтауының дәлдігін анықтаңыз (бірінші туындыны жуықтаудың II жолы).

2. (1.21) сұлбасының тұрақтылығын зерттеңіз.

3. (1.5) теңдеуіне арналған айқын емес жуықтау сұлбасын тұрақтылыққа зерттеу .

Әдебиеттер:

1. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. Москва, Изд-во «Мир», 1970

2. С.А.Ляшко «Элементы теории динамических систем» Учебное пособие для студентов специальности «Математика», «Прикладная математика», «Прикладная информатика» Балашов, Изд-во «Николаев», 2005, 104С.

3. В.И. Арнольд «Обыкновенные дифференциальное уравнения» Ижевск: Удм.ГУ, 2000. – 368 с.